

# “流れ”を記述する偏微分方程式の 風上差分法による数値解法

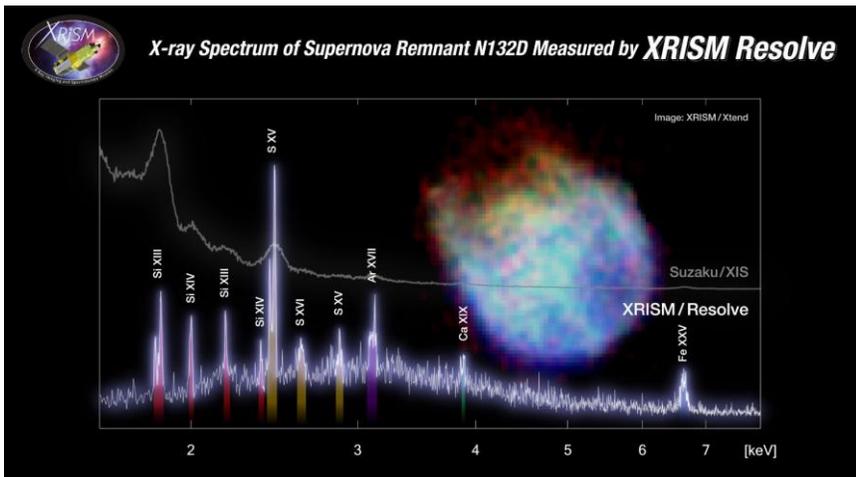
研究室談話会

2025.6.2

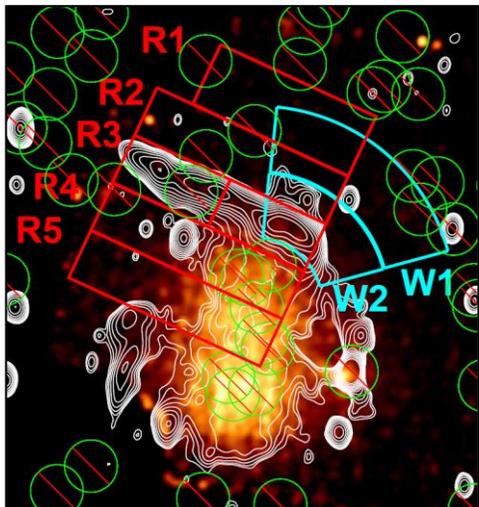
滝沢元和

# 談話会について（初回なので）

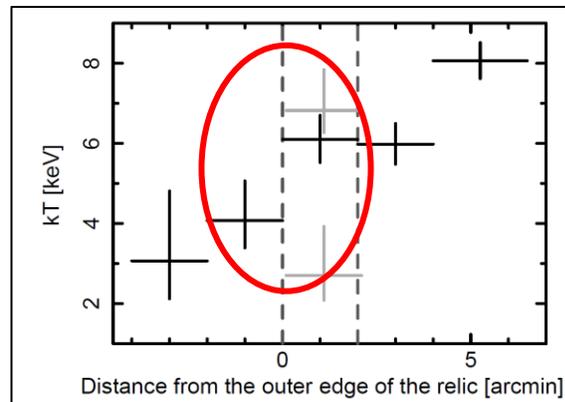
- 途中に質問が入ることなどを考慮のうえ70－90分程度で発表を終えられるよう、発表者は準備してください。仮に途中質問なしの場合で60分ぐらいが一応の目安かと思います。
- 談話会中の飲食は周りに迷惑のかからない範囲なら特に問題としません。（可能ならば）コップは持参してください。
- **発表途中での質問は大推奨です（わからないままにしとかないように）**。発表終了後にも質問の時間を設けます。
- **正規参加者（教員＋4年生）は必ず質問をするようにしてください。**



超新星残骸N132DのX線イメージ&スペクトル:  
XRISMホームページより



“toothbrush”銀河団のX線(カラー)  
&電波(等高線)イメージ  
Itahana et al. (2017)

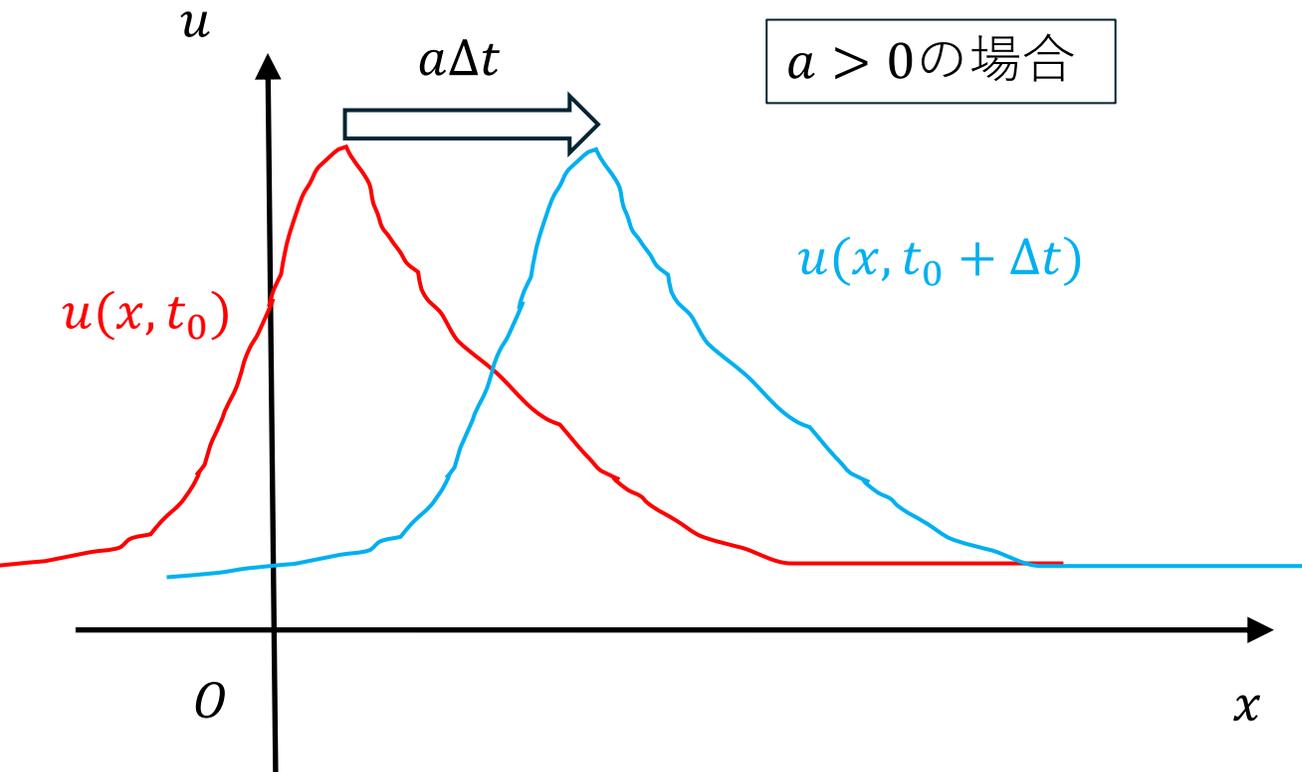


“toothbrush”銀河団の  
“衝撃波”近傍での温度  
プロファイル  
Itahana et al.(2017)

# Introduction

- 宇宙におけるガスの流れを解析する際に流体力学の手法がしばしば用いれる。
  - 超新星や星表面などでの様々な爆発現象
  - 銀河からのガスの流出、降着
  - 銀河団の衝突
- 磁場をもったプラズマだと電磁流体力学も
  - 太陽コロナ、太陽フレア
  - 星形成
- 幾何学的対称性や定常などの仮定がない一般の場合、解析的取り扱いは困難なため、数値シミュレーションが多用される。

# 線形波動方程式（一成分）



- “流れ”を表すもっとも単純な偏微分方程式。

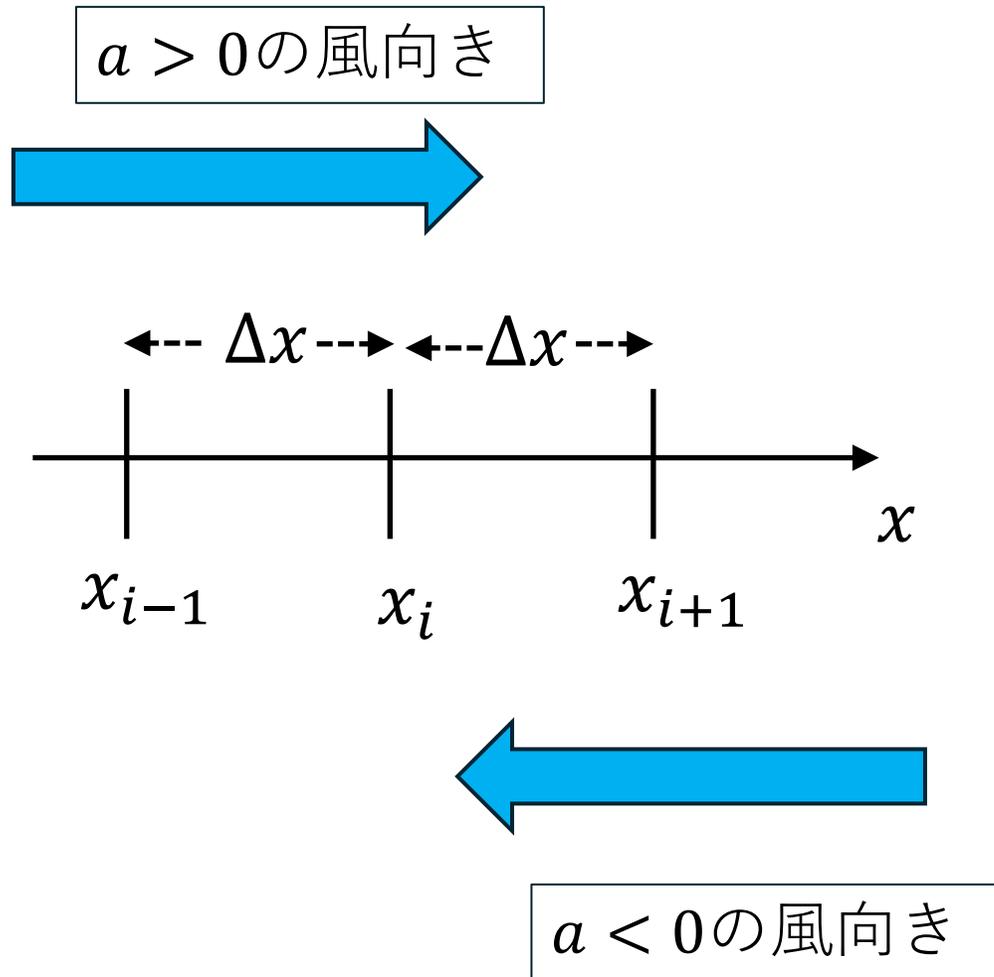
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (a: \text{定数})$$

- これは以下のような一般解をもつ

$$u(x, t) = u(x - at)$$

- $t = t_0$ でのパターン  $u(x, t_0)$ が形を変えずに速度  $a$  で  $x$  軸方向に伝播。

# 風上差分法



- 線形波動方程式を差分化したい。空間微分の部分をどうするか。
- **情報の伝わる方向を考慮して“風上”で空間差分をとる。**

——> 風上差分法

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (a: \text{定数})$$

$u(i\Delta x, n\Delta t) = u_i^n$  と離散化すると

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (a > 0)$$

or

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0 \quad (a < 0)$$

# 線形波動方程式（多成分）

- $\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  ただし  $A = \{a_{ij}\}$  は定行列

- 行列  $A$  を対角化  $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$  すれば

- $\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  ただし、 $\delta \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = P^{-1} \delta \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

- すなわち、 **$w_i$  が速度  $\lambda_i$  で伝搬する  $n$  本の独立な線形波動方程式に分解でき**、それぞれについて“風上”を考慮して差分化すればよい。

# 非線形波動方程式（一成分）

- $\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$
- 伝播速度  $a$  が  $u$  に依存。このときも  $a$  の符号（伝搬方向）に応じて、“風上”を判定して差分をとればよい。
- $a(u)$  を中間位置で評価する必要があるため何らかの“平均化”が必要。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \hat{a}(u_i, u_{i-1}) \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{for } \hat{a}(u_i, u_{i-1}) > 0$$

or

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \hat{a}(u_{i+1}, u_i) \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{for } \hat{a}(u_i, u_{i-1}) < 0$$

# バーガーズ方程式

$$\bullet \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

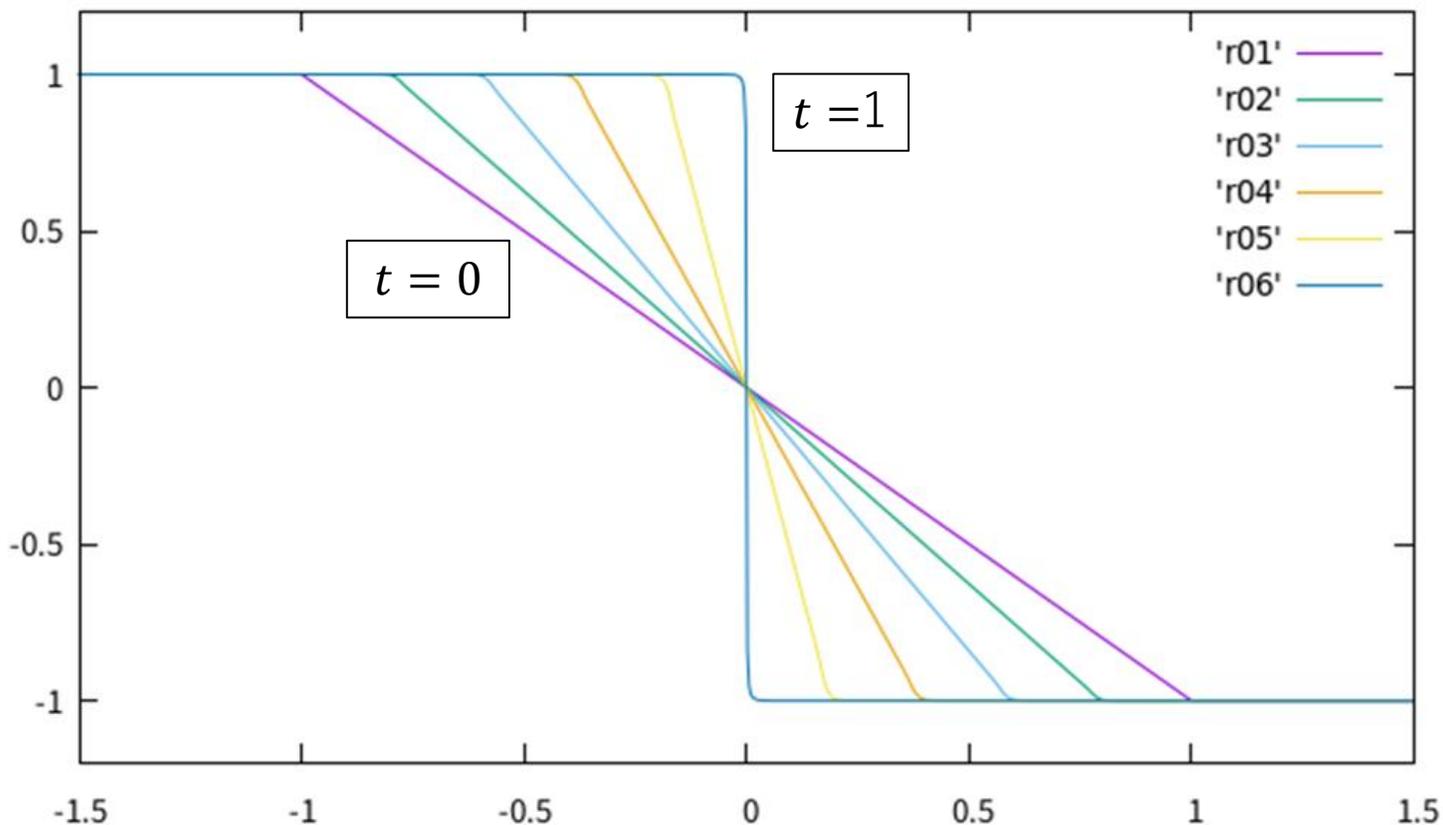
**波の値そのものが伝播速度**になっており、単純ながらも非線形効果（ex. 衝撃波の形成）を見ることができる。

右図は計算例

初期条件： $t = 0$ で

$$\begin{cases} u = 1 & (x < -1) \\ u = -x & (-1 < x < 1) \\ u = -1 & (x > 1) \end{cases}$$

$t = 0 \sim 1$ まで計算



# 非線形波動方程式（多成分）

- $$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
 ただし  $A(\mathfrak{u}) = \{a_{ij}(\mathfrak{u})\}$  は  $\mathfrak{u}$  に依存

- 線形の時と同様に行列  $A(\mathfrak{u})$  を対角化  $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$  すれば

- $$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
 ただし、 $\delta \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = P^{-1} \delta \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

- すなわち、 $w_i$  が速度  $\lambda(\mathfrak{u})_i$  で伝搬する  $n$  本の独立な非線形波動方程式に分解でき、それぞれについて“風上”や  $\lambda(\mathfrak{u})_i$  および  $A(\mathfrak{u})$  の“平均化”を考慮すればよい。

# 保存形式との関係

- 基礎方程式はしばしば保存量  $\mathbb{u}$  とそのフラックス  $\mathbb{f}$  を用いて保存形で書かれている。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

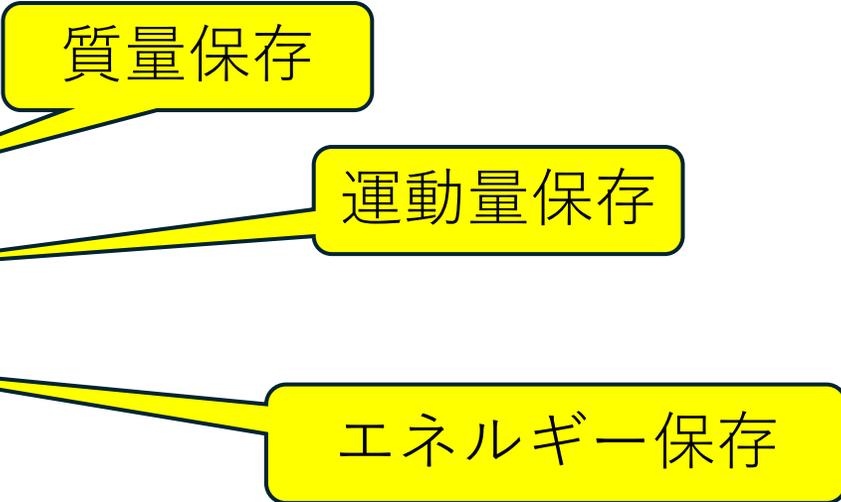
この場合は、 $\mathbb{f}$  と  $\mathbb{u}$  のヤコビアン行列  $A = \{a_{ij}\} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right\}$  を導入して

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすればよい。

# 一次元圧縮性流体（粘性なし）：保存形

- 保存形

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$


質量保存  
運動量保存  
エネルギー保存

ただし、 $\rho$ ：密度、 $u$ ：速度、 $p$ ：圧力、

$$E = \frac{u^2}{2} + \frac{p}{(\gamma-1)\rho} : \text{単位質量当たりの総エネルギー}$$

$$H = \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho} : \text{単位質量当たりのエンタルピー}$$

$\gamma$ ：比熱比

# 一次元圧縮性流体（粘性なし）：準線形形式

- 保存形に対して、ヤコビアン行列を求めて準線形化

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(3-\gamma)\frac{u^2}{2} & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ (\gamma-1)u^3 - \gamma u E & \gamma E - 3\frac{\gamma-1}{2}u^2 & \gamma u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

# 一次元圧縮性流体（粘性なし）：特性変数形

- 準線形形式のヤコビアン行列を対角化して特性変数形式に

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u + c & 0 \\ 0 & 0 & u - c \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ただし、 $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ ：音速、

特性変数  $\begin{cases} \delta w_1 = \delta \rho - \frac{1}{c^2} \delta p \\ \delta w_2 = \delta u + \frac{1}{\rho c} \delta p \\ \delta w_3 = \delta u - \frac{1}{\rho c} \delta p \end{cases}$

# 一次元圧縮性流体（粘性なし）：Roe法

適切な条件で平均化したヤコビアンを使って線形化(Roe 1981)。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F(Q)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A(Q) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad A = \frac{\partial F}{\partial Q}$$

Q: 保存変数ベクトル  
F: フラックスベクトル  
A: ヤコビアン行列


$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A^*(Q_L, Q_R) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

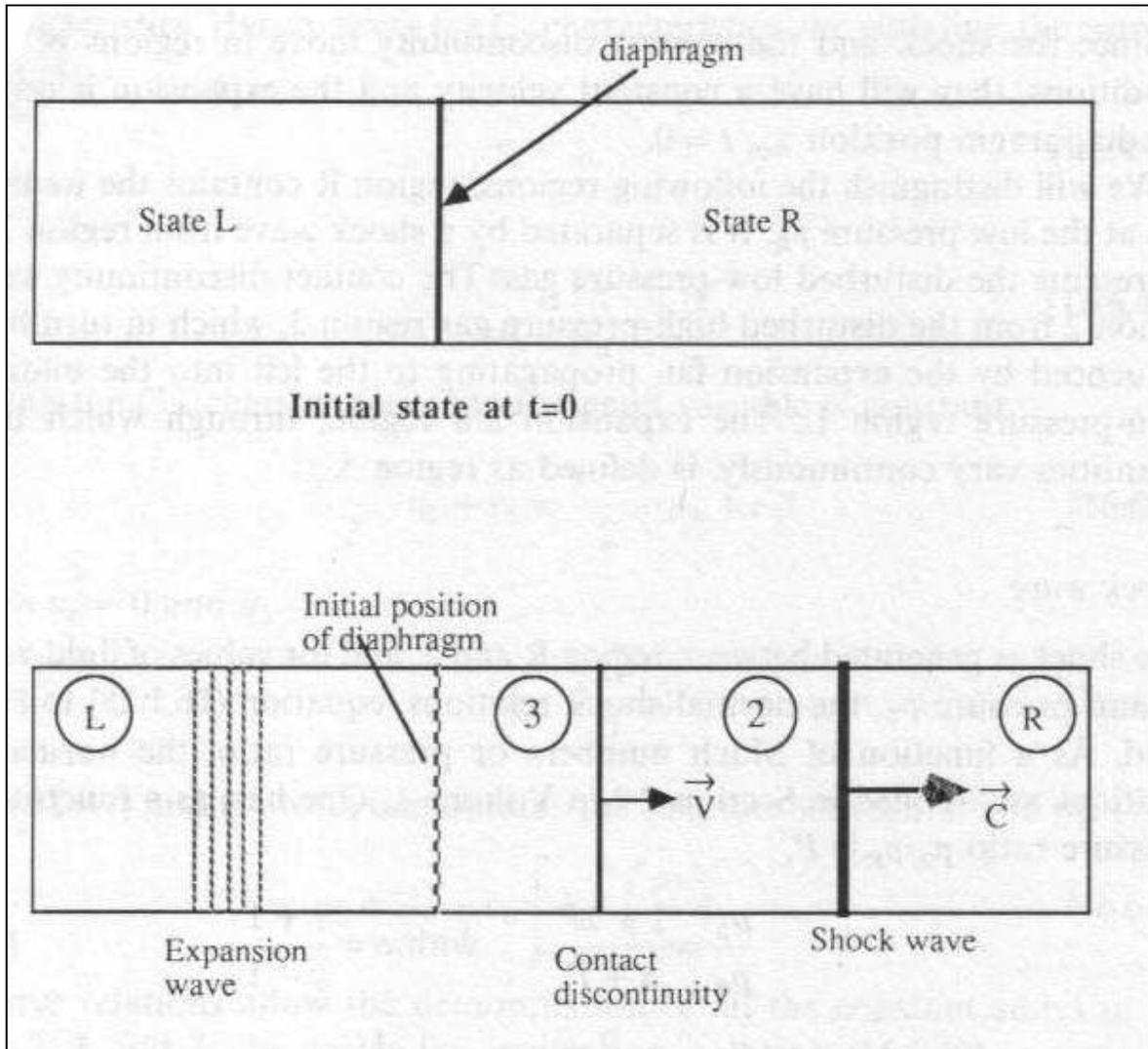
ヤコビアン行列A(Q)を両端の値を使って線形化

ただし、 $A^*(Q_L, Q_R)$  は以下の条件を満たすように決める。

- 1,  $A^*(Q_L, Q_R) \times (Q_R - Q_L) = F(Q_R) - F(Q_L)$
- 2,  $A^*(Q_L, Q_R)$  は対角化可能で実固有値を持つ。
- 3,  $Q_L, Q_R \rightarrow Q$  のときに滑らかに  $A^*(Q_L, Q_R) \rightarrow A(Q)$

結果として、圧縮性流体系では  $\rho^{1/2}$  で重みをつけて平均化した  $A^*$  をとればよい。

# 一次元圧縮性流体：衝撃波管問題



初期に異なった一様な状態が接した状態

衝撃波、接触不連続面  
膨張波が伝播  
(それぞれ  $u + c, u, u - c$  に対応)

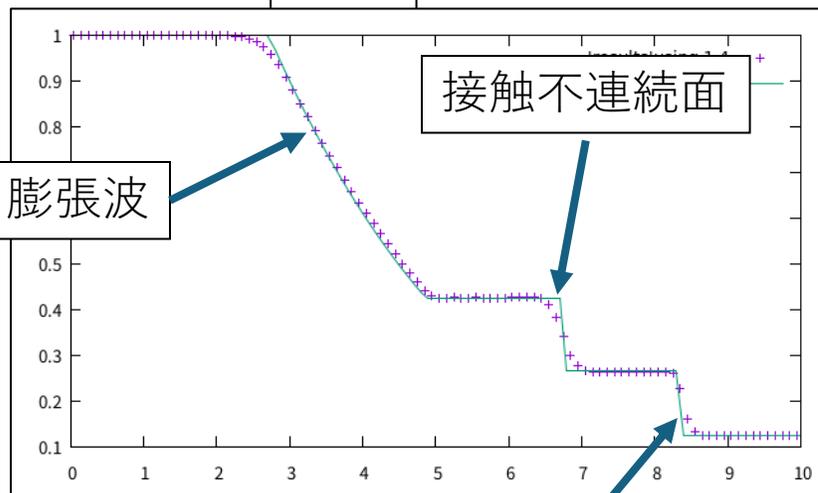
厳密解が数値的に求まる。  
(非線形方程式を解くのが必要)

数値計算コードのテスト・評価に適している。

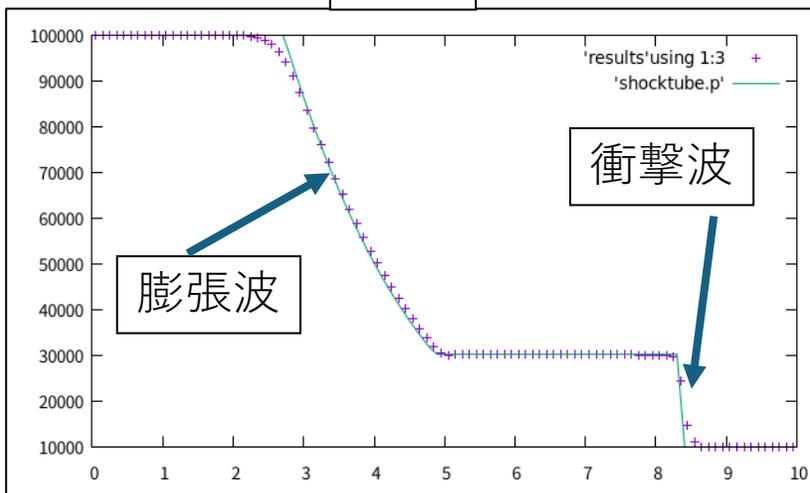
# 一次元圧縮性流体：計算例

初期条件： $P_L=10^5$ ,  $P_R=10^4$ ,  $\rho_L=1.0$ ,  $\rho_R=0.125$ ,  $v_L=v_R=0$   
 $t=0.0061$ まで計算，メッシュ数100，

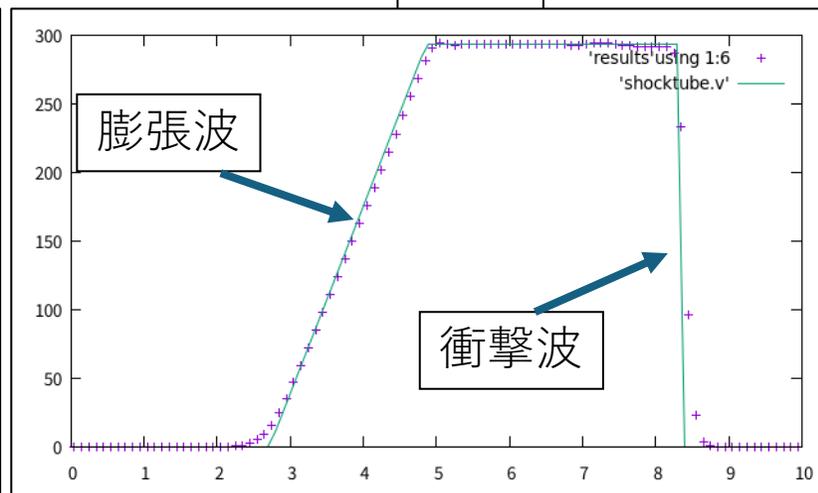
密度



圧力



速度



衝撃波

点線：計算結果 実線：厳密解

# 一次元電磁流体力学（保存形）

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ B_y \\ B_z \\ E \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p^* - B_x^2 \\ \rho v_x v_y - B_x B_y \\ \rho v_x v_z - B_x B_z \\ B_y v_x - B_x v_y \\ B_z v_x - B_x v_z \\ (E + p^*)v_x - B_x(B_x v_x + B_y v_y + B_z v_z) \end{pmatrix},$$

上から順に

質量

運動量（x成分）

（y成分）

（z成分）

磁束（y成分）

（z成分）

エネルギー

の保存

ただし、

$$p^* = p + (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)/2 \quad \text{---- ガス圧 + 磁気圧}$$

$$E = (\rho/2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + p/(\gamma - 1) + (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)/2 \quad \text{--- 単位体積当たりのエネルギー}$$

また、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より、 $B_x$ は一定

# 一次元電磁流体力学 (固有値)

固有値：  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7) =$   
 $(v_x - c_f, v_x - c_a, v_x - c_s, v_x, v_x + c_s, v_x + c_a, v_x + c_f)$

$$c_a = \sqrt{\frac{B_x^2}{\rho}}$$

Alfvén speed

$$c_f = \left\{ \frac{1}{2} \left[ a^2 + \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{\rho} + \sqrt{\left( a^2 + \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{\rho} \right)^2 - 4a^2 \frac{B_x^2}{\rho}} \right] \right\}^{1/2}$$

fast speed

$$c_s = \left\{ \frac{1}{2} \left[ a^2 + \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{\rho} - \sqrt{\left( a^2 + \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{\rho} \right)^2 - 4a^2 \frac{B_x^2}{\rho}} \right] \right\}^{1/2}$$

slow speed

a: 音速

注: (1)  $B_x=0$ では  $c_s=c_a=0$ 、  $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=\lambda_6$   
 (2)  $B_y^2+B_z^2=0$ では  $c_f=\max(a,c_a)$ 、  $c_s=\min(a,c_a)$   
 (2-1)  $a \neq c_a$ なら  $c_a=c_f$  or  $c_s$  で  $\lambda_2=\lambda_{1or3}$   $\lambda_6=\lambda_{5or7}$   
 (2-2)  $a=c_a$ なら  $c_f=c_s=c_a$  で  $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ 、  $\lambda_5=\lambda_6=\lambda_7$

# 一次元電磁流体力学 (特性変数)

$$\delta w_7 + \delta w_1 = \frac{1}{\theta_1} \left[ \frac{\alpha_f a^2}{\gamma - 1} \delta p + \left\{ \alpha_f a^2 B_y + \alpha_s \left( c_s^2 - \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} a^2 \right) \sqrt{\rho} \beta_y c_f \right\} \delta B_y \right. \\ \left. + \left\{ \alpha_f a^2 B_z + \alpha_s \left( c_s^2 - \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} a^2 \right) \sqrt{\rho} \beta_z c_f \right\} \delta B_z \right]$$

$$\delta w_7 - \delta w_1 = \frac{\rho}{\theta_2} \left\{ \alpha_f a \delta v_x - \alpha_s c_s \beta_y \text{sign}(B_x) \delta v_y - \alpha_s c_s \beta_z \text{sign}(B_x) \delta v_z \right\}$$

$$\delta w_5 + \delta w_3 = \frac{1}{\theta_1} \left[ \frac{\alpha_s c_f^2}{\gamma - 1} \delta p + \left\{ \alpha_s c_f^2 B_y - \alpha_f \left( c_f^2 - \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} a^2 \right) \sqrt{\rho} \beta_y c_f \right\} \delta B_y \right. \\ \left. + \left\{ \alpha_s c_f^2 B_z - \alpha_f \left( c_f^2 - \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} a^2 \right) \sqrt{\rho} \beta_z c_f \right\} \delta B_z \right]$$

$$\delta w_5 - \delta w_3 = \frac{\rho}{\theta_2} \left\{ \alpha_s c_a \delta v_x + \alpha_f c_f \beta_y \text{sign}(B_x) \delta v_y + \alpha_f c_f \beta_z \text{sign}(B_x) \delta v_z \right\}$$

$$\delta w_6 + \delta w_2 = \sqrt{\rho} (\beta_z \delta B_y - \beta_y \delta B_z)$$

$$\delta w_6 - \delta w_2 = \text{sgin}(B_x) \rho (-\beta_z \delta v_y + \beta_y \delta v_z)$$

$$\delta w_4 = \delta \rho - \alpha_f (\delta w_7 + \delta w_1) - \alpha_s (\delta w_5 + \delta w_3)$$

$$u_x \pm c_f$$

$$u_x \pm c_s$$

$$u_x \pm c_a$$

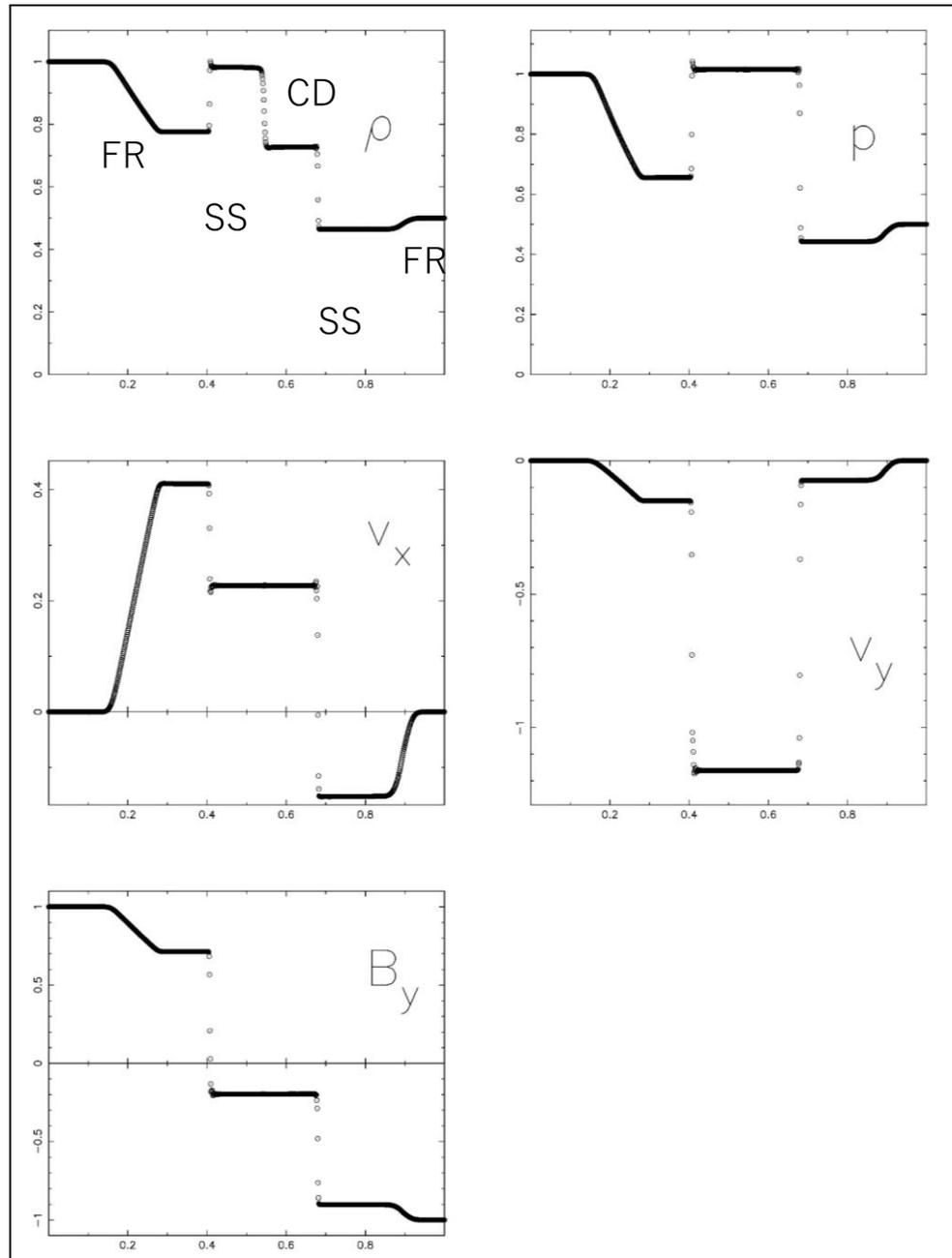
$$u_x$$

ただし、

$$\theta_1 = \alpha_f^2 a^2 \left( c_f^2 - \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} a^2 \right) + \alpha_s^2 c_f^2 \left( c_s^2 - \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} a^2 \right)$$

$$\theta_2 = \alpha_f^2 c_f a + \alpha_s^2 c_s c_a$$

# 一次元電磁流体力学：計算例



MHD shock tube test

初期条件：

左  $\rho = 1$ ,  $p = 1$ ,  $B_y = 1$

右  $\rho = 0.5$ ,  $p = 0.5$ ,  $B_y = -1$

$B_x = 0.75$ ,  $\gamma = 5/3$ , 格子数1000

$t = 0.2$ での結果

図中の略語

FR: fast rarefaction

SS: slow shock

CD: contact discontinuity

# その他の方法について簡単なコメント

- 電磁流体や相対論的（電磁）流体になると、ヤコビアンや固有値を求めるのが複雑になり、現実的には**必ずしも馬鹿正直な方法がいいとは限らなくなってくる。**
- “適度に”手抜きした方法も提案されている。
  - HLL法：固有値のうち最大値と最小値のみを考慮
  - HLLD法：HLL法の改良版
- **一格点あたりの計算量が減れば、結果的に格子点数を増やせることになるので、トータルで見ると“手抜き”したほうがいい可能性もある。**

# まとめ

- 宇宙での活動現象を記述するのに（電磁）流体力学の手法がしばしば使われる。
- 各種の“流れ”を記述する偏微分方程式系の数値解法として風上差分法を紹介した。
- 圧縮性流体力学及び電磁流体力学の場合について、ヤコビアンやその固有値、特性変数を計算した。
- 圧縮性流体力学及び電磁流体力学の数値計算例を紹介した。